EIVP – CONCOURS INTERNE – MATHEMATIQUES – 2016

Durée : 4 heures – Sans document ni téléphone portable – Calculatrice autorisée

- Le barème tient compte des qualités de rédaction et de présentation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et indique les initiatives qu'il est amené à prendre.
- Tout résultat donné dans l'énoncé, mais non démontré dans la copie, pourra être utilisé dans la suite du problème.
- L'épreuve est constituée de parties indépendantes, que l'on traitera dans l'ordre de son choix ; il n'y a aucune relation entre le numéro d'une question et son degré à priori de difficulté.

Problème : Un peu d'analyse

Première partie (6 points)

On considère la fonction *f* définie par la relation : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

1.1 Déterminer l'ensemble de définition D de *f.*

1.2 Donner le développement limité de ln(1 + x) au voisinage de 0, à l'ordre 2.

Montrer que *f* admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur *f* est alors prolongée et on continuera à appeler *f* le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de *f.*

1.3 *f* est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser *f'*(0).
Calculer *f'*(x) sur D puis prouver que *f* est de classe C^1 sur D'.

1.4 Etudier les variations de *f.* On dressera son tableau de variation.

On pourra utiliser la fo*nction* auxiliaire *k* définie par : *k*(x) = x – (1 + x) ln (1 + x).

1.5 On considère la courbe **Γ** définie en coordonnées polaires par : ρ = *f*(θ).

a) Préciser l'allure de **Γ** lorsque θ → + ∞ ainsi que le coefficient directeur de la tangente au point de paramètre θ = 0.

b) On pose *Y*(θ) = ρ(θ).sin (θ + 1). Déterminer $\lim_{\theta \to -1} Y(\theta)$**.** On admet que le résultat de ce calcul prouve que **Γ** admet une asymptote d'équation y = - tan(1).x lorsque θ → - 1 et on ne demande pas de justifier cette propriété.

c) Tracer l'allure de la courbe **Γ**. On fera apparaître la tangente et l'asymptote évoquées ci-dessus.

Deuxième partie (indépendante de la première partie) (4 points)

Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante : $\int_0^1 f(t)dt$.

On notera L valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.
Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes :

$P_n(X) = X - X^2/2 + X^3/3 - X^4/4 + \dots + (-1)^{n-1} X^n/n$ et

$Q_n(X) = X - X^2/2^2 + X^3/3^2 - X^4/4^2 + \dots + (-1)^{n-1} X^n/n^2$

1.6 Préciser pourquoi l'intégrale précédente est bien définie.

1.7 Justifier : quel que soit $t \in [0, 1]$, $1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$.

1.8 En déduire que :

quel que soit $x \in [0, 1]$, $P_n(X) = \ln(1 + x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$

Dans tout la suite, quel que soit n ε N (ensemble des entiers naturels) et, quel que soit $x \in [0, 1]$:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

1.9 Etablir la majoration : quel que soit n ε N (ensemble des entiers naturels) et, quel que soit $x \in [0, 1]$:

$$| R_n(x) | \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} .$$

1.10 Comparer pour tout $x \in]0, 1]$ $Q_n'(X)$ et $\frac{Pn(X)}{x}$.

1.11 En notant g_n l'application définie pour tout $x \in]0, 1]$ par $g_n(x) = \frac{Pn(X)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$ et par $g_n(0) = 0$, montrer que :

$$| Q_n(1) - L | \leq \int_0^1 | g_n(x)| \, dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

En déduire $\lim_{n\to\infty} Qn(1)$.

1.12 Déterminer un entier naturel N tel que $Q_n(1)$ approxime L *à* 10^{-4} près.

Exercices

1. Deux suites de suite ! (5 points)

1.1 On définit par récurrence deux suites $(a_n)_{n \varepsilon N}$ et $(b_n)_{n \varepsilon N}$ de réels de la manière suivante :

$a_0 = a$; $b_0 = b$ et pour tout entier appartenant à N (ensemble des entiers naturels):

$$a_{n+1} = (a_n b_n)^{1/2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$$

1.1.1 Montrer que, pour tout n ε à N, on a :

$$0 < b_n - a_n \leq (b - a)/2^n$$

1.1.2 Montrer que la suite $(a_n)_{n \varepsilon N}$ est strictement croissante et que la suite $(b_n)_{n \varepsilon N}$ est strictement décroissante.

1.1.3 Montrer que, quels que soient les entiers naturels *p* et *q*, on a $a_p < b_q$

1.1.4 Montrer que les suites $(a_n)_{n \varepsilon N}$ et $(b_n)_{n \varepsilon N}$ sont convergentes, et qu'elles ont la même limite.

1.1.5 On pose $\rho = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\lambda = b^2(b - a)/(b + a)^3$ et, pour tout entier n,

$$\rho_n = (a_n / b_n)^{1/2} \quad \text{et} \quad \lambda_n = b_n^{\,2}(b_n - a_n) / (b_n + a_n)^3$$

1.1.6 Donner une expression de $\rho_{n+1}^{\;2}$ en fonction de ρ_n

1.1.7 Donner une expression de λ_n en fonction de ρ_n

1.1.8 Montrer que, pour tout n ε N, on a $\lambda_{n+1} < \lambda_n^{\,2}$.

En déduire que, pour tout n ε N, $\lambda_n < \lambda^{2n}$

2 Où il est question de matrices (3 points)

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.1 Calculer la matrice suivante $A^2 - 3A + I_2$

2.2 En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

2.3 Soit n supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 3X + 2$

2.4 En déduire la matrice A^n

3 Une équation différentielle (2 points)

Soit l'équation différentielle : $(x + 1)\, y' + x\, y = x^2 - x + 1$

3.1 Trouver une solution polynômiale.

3.2 En déduire l'ensemble des solutions sur l'ensemble des réels.

3.3 Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$