EIVP – CONCOURS INTERNE – MATHEMATIQUES – 2017

Durée : 4 heures – Sans document ni téléphone portable – Calculatrice autorisée

- Le barème tient compte des qualités de rédaction et de présentation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et indique les initiatives qu'il est amené à prendre.
- Tout résultat donné dans l'énoncé, mais non démontré dans la copie, pourra être utilisé dans la suite du problème.
- L'épreuve est constituée de parties indépendantes, que l'on traitera dans l'ordre de son choix ; il n'y a aucune relation entre le numéro d'une question et son degré à priori de difficulté.

Problème : Un peu d'analyse (7 points)

1) Soit g l'application de R dans R définie par :

$$g(t) = \text{Arctan } t - t + t^3/3$$

a) Vérifier que g est impaire, dérivable sur R, et calculer g'(t), pour tout $t \in R$.
b) Montrer que pour tout $t \in R$, $0 \leq g'(t) \leq t^2$.
c) En déduire que pour tout $t \in R+$, $t - t^3/3 \leq Arctan\ t \leq t$.

2) Soit f l'application de R dans R définie par :

$$f(0) = 1 \text{ et quelque soit } t \neq 0,\ f(t) = \text{Arctan } t / t$$

a) Montrer que f est continue sur R et paire.
b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner f'(0).
c) Justifier que f est dérivable sur R et calculer f'(t), pour tout $t \in R^*$.

3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

a) Pour tout $t \in R^*$, $\int_0^t u^2/(1+u^2)^2 du = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$
b) En déduire le sens de variation de f.

4) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Conseils : 1) c) Intégrer l'inégalité précédente.
2) a) Calculer lim f(t) quand t tend vers 0^+ .
2) b) Se souvenir de la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point.
3) b) Préciser les limites de f en +/- l'infini.

Exercices

1 : Constante d'Euler (4 points)

1_ Démontrer que :

$$\forall n \in \mathrm{N}^* \qquad \frac{1}{n+1} \leq ln\ \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

2_ On considère les suites $(u_n)_n \in \mathrm{N}^*$ et $(v_n)_n \in \mathrm{N}^*$ définies par :

$$\forall n \in N * \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \qquad (v_1 = 0)$$

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

En déduire que (u_n) converge vers un réel $\Upsilon \in [0,1]$.

Encadrer Υ à 10^{-1} près.

3_ On considère les suites $(Wn)n \in N * et\ (Zn)n \in N *$ définies par :

$$\forall n \in N * \qquad w_n = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad z_n = \frac{u_n + v_{n+1}}{2}$$

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

Quelle est leur limite commune ? En déduire un encadrement de Υ à 10^{-3} près.

Conseils : 1) Se souvenir que le logarithme népérien est une primitive de la fonction $\frac{1}{t}$.

2) et 3) Revoir la définition des suites adjacentes. Pour étudier le sens de variation des suites $(w_n)_n$ et $(z_n)_n$, on pourra utiliser des études de fonctions.

2 : Equation de Bernoulli (3 points)

On considère l'équation différentielle :

$$xy' + (x-1)y + y^2 = 0 \qquad (E)$$

1) Soit y une solution de l'équation (E) sur ***R+* et sur R-*,*** ne s'annulant pas sur ces intervalles.

Ecrire l'équation différentielle (E') vérifiée par la fonction u = $\frac{1}{y}$; résoudre (E') puis (E).

2) Montrer que l'équation (E) possède une solution f et une seule, définie sur ***R,*** et telle que $\lim_{x \to 0} f(x) \neq 0$.
3) Etudier brièvement les variations de f et tracer son graphe dans un repère orthonormé.

Conseils : 1) (E') est une équation linéaire.

2) On pourra se servir de la calculatrice pour chercher si l'on peut prolonger la solution en 0 en une solution continue et dérivable.

3 : Matrice d'une application linéaire (3 points)

Soit f l'endomorphisme de $\boldsymbol{R^3}$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer Ker f et Im f.
2) Démontrer que ces deux sous-espaces sont complémentaires dans $\boldsymbol{R^3}$.
3) En déduire une base de $\boldsymbol{R^3}$, réunion d'une base de Ker f et d'une base de Im f.
4) Ecrire la matrice de f dans cette base.
5) Décrire f comme la composée de deux endomorphismes très simples.

4 : Intégration par parties (3 points)

On considère la suite (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{pi}{2}} x^n sinx \, dx$$

1) Etablir une formule de récurrence.
2) En déduire I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Conseils : 1) On effectuera une double intégration par parties.

2) **On divisera le résultat par n ! et on distinguera suivant la parité de n.**