Exercice 1

Dans tout l'exercice, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 2$) à coefficients réels est noté $M_n(\mathbb{R})$. On notera I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$, et J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices de la forme $aI_n + bJ$, où a, b sont des réels.

$E = \{aI_n + bJ, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

2) Dans cette question, on suppose $n = 2$.

2.a) Calculer J^2. En déduire que pour tout couple (M, M') de matrices de E, le produit MM' appartient à E.

2.b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice $M = aI_2 + bJ$ soit inversible. Si M est inversible, montrer que son inverse M^{-1} appartient à E et donner M^{-1}.

2.c) Soit $M = aI_2 + bJ$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe deux réels a_p et b_p tels que $M^p = a_p I_2 + b_p J$. Les déterminer.

3) Dans cette question, on suppose $n = 3$.

3.a) De même qu'en 2) calculer J^2 et en déduire que pour tout couple (M, M') de matrices de E, le produit MM' appartient à E.

3.b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice $M = aI_2 + bJ$ soit inversible. Lorsque c'est le cas donner M^{-1}.

4) Dans cette question n est un entier supérieur ou égal à 2 quelconque.

4.a) Calculer J^2.

4.b) On pose $M = aI_n + bJ$. Montrer que $\ker(M) = \{0\}$ si et seulement si $a \neq 0$ et $a + nb \neq 0$.

En déduire que M est inversible si et seulement si $a(a + nb) \neq 0$ et donner dans ce cas M^{-1} en fonction de I_n et de J.

4.c) Soit $M = aI_n + bJ$. En utilisant la même méthode qu'en 2.c) calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Une particule se déplace dans un graphe de trois sommets. Les sommets sont notés 1,2,3.
A l'instant 0, la particule est sur le sommet 1. A l'instant $n=1$ elle saute aléatoirement sur un sommet du graphe. On poursuit le processus : à chaque instant suivant $n=2,3,4...$ la particule saute sur un nouveau sommet (éventuellement le même) de manière aléatoire selon les probabilités suivantes :

- Si la particule est sur le sommet 1 à l'instant *n*, la probabilité qu'elle saute à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 est $1/2$ et la probabilité qu'elle saute sur le sommet 3 est $1/2$.
- Si la particule est sur le sommet 2 à l'instant *n*, la probabilité qu'elle saute à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 est $1/2$ et la probabilité qu'elle saute sur le sommet 3 est $1/2$.
- Si la particule est sur le sommet 3 à l'instant *n*, la probabilité qu'elle saute à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 est $1/4$, la probabilité qu'elle saute sur le sommet 2 est $1/4$ et la probabilité qu'elle reste sur le sommet 3 est $1/2$.

On définit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{1,2,3\}$ telles que, pour tout entier *n*, et tout $k\in\{1,2,3\}$, $X_n=k$ si la particule se trouve sur le sommet *k* du graphe après le $n^{\text{ème}}$ saut.

1) Donner $P(X_0=1)$, $P(X_0=2)$, $P(X_0=3)$, puis $P(X_1=1)$, $P(X_1=2)$, $P(X_1=3)$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. Justifier les égalités suivantes (on indiquera la formule utilisée) :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}P(X_n=2)+\frac{1}{4}P(X_n=3)$$

$$P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{1}{4}P(X_n=3)$$

$$P(X_{n+1}=3)=\frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2)+\frac{1}{2}P(X_n=3)$$

Pour alléger les notations, on posera pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=P(X_n=1)$, $b_n=P(X_n=2)$, $c_n=P(X_n=3)$.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note Y_n la matrice colonne $Y_n=\begin{pmatrix}P(X_n=1)\\P(X_n=2)\\P(X_n=3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A\in M_3(\mathbb{R})$, qu'on donnera, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Y_{n+1}=AY_n$.

4) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Y_n=A^nY_0$.

5) Donner pour $n\geq 1$, $c_n=P(X_n=3)$. Justifier la réponse.

6. a) Calculer A^2 puis $A^2\times(3A-I_3)$ (où I_3 est la matrice identité d'ordre 3). En déduire que $A^3=\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}A$.

b) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ il existe des réels u_n et v_n tels que : $A^n=u_nA^2+v_nA$.

c) Exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n, puis u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.

d) Calculer, pour tout entier $n \geq 1$, u_n et v_n. Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont-elles convergentes ?

7) Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, les valeurs de a_n et b_n.

Problème

Notations :

Dans ce problème E désigne l'espaces vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ($E = C\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$), et E_1 le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions continues 1-périodiques, c'est-à-dire des fonctions continues vérifiant pour tout réel *x*, $f(x+1) = f(x)$.

Dans tout le problème on désigne par φ l'application définie sur E par :

pour toute fonction $f \in E$, $\varphi(f) = F$ où *F* est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à *x* associe $\int_x^{x+1} f(t)dt$

c'est-à-dire : pour tout réel *x*, $\varphi(f)(x) = F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

Partie I : quelques propriétés de $F = \varphi(f)$ et de l'application φ.

1. Exemples

1.a) Expliciter $F(x)$, si f est définie par $f(t) = 1$.

1.b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Expliciter $F(x)$, si f est définie par $f(t) = t^k$.

2. Une propriété de φ.

2) Montrer que φ est un endomorphisme de *E*.

3) Variations de $F = \varphi(f)$.

On désigne maintenant par *f* une fonction arbitraire de *E*.

3.a) Justifier que la fonction *F* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Expliciter $F'(x)$ en fonction de f et x. (On pourra utiliser une primitive *H* de *f*.)

3.b) Montrer que si la fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $J_{x_0} = \left[x_0, +\infty\right[$, alors la fonction *F* est croissante (respectivement décroissante) sur J_{x_0}.

3.c) Montrer que la fonction $F = \varphi(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si *f* appartient à E_1.

3.d) Soit f la fonction définie par $f(t) = \left|\sin(\pi t)\right|$. Vérifier que f appartient à E_1. Expliciter $F(x)$.

4) Soient $f \in E$ et $F = \varphi(f)$. On considère la fonction *G* définie par $G(u) = F\left(u - \frac{1}{2}\right)$.

Comparer $G(u)$ et $G(-u)$ lorsque la fonction *f* est impaire (respectivement lorsque la fonction *f* est paire).

Partie II Etude du noyau de φ .

1) Montrer que l'endomorphisme φ n'est pas surjectif . (On pourra utiliser la question 3.a) de la partie I.)

2) Montrer que $f \in \ker(\varphi)$ si et seulement si f appartient à E_1 et $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

Désormais dans cette partie, les fonctions considérées sont éléments de E_1 .

3) Soient f et g deux fonctions de E_1 . On pose $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto < f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E_1 .

4) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note c_k la fonction définie par $c_k(t) = \cos(2\pi kt)$.

4.a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, c_k appartient au noyau de φ .

4.b) Soit $(k, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer $< c_k, c_j >$ lorsque $k \neq j$ puis lorsque $k = j$.

4.c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(c_k)_{1 \le k \le n}$ est libre.

4.d) Montrer que $\ker(\varphi)$ n'est pas de dimension finie.

III Noyau de $\varphi - \lambda Id_E$.

Dans cette question, les fonctions considérées sont des fonctions quelconques de *E*. On note 0_E la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

1) Soit *a* est un réel fixé, on note h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(t) = e^{at}$.

Montrer que chaque h_a appartient au noyau de $\varphi - \lambda Id_E$ pour une valeur de λ qu'on précisera.

2) On considère la fonction $h : u \mapsto \dfrac{e^u - 1}{u}$ où $u \in \mathbb{R}^*$.

2.a) Montrer que *h* peut être prolongée par continuité en 0. Préciser la valeur de $h(0)$.

2.b) Soit $u \in \mathbb{R}^*$. Déterminer $h'(u)$. On pose $h'(u) = \dfrac{N(u)}{u^2}$. Etudier la variation de la fonction *N* sur $\mathbb{R}$. En déduire la variation de la fonction *h* sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que, pour tout réel λ positif ou nul, $\ker(\varphi - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$.