

# EIVP - CONCOURS INTERNE - PHYSIQUE – 2018

Durée : 4 heures – Sans document ni téléphone portable - Calculatrice autorisée -

Le barème tient compte des qualités de rédaction et de présentation de la copie.

- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et indique les initiatives qu'il est amené à prendre.
- Tout commentaire est le bienvenu, même lorsqu'il n'est pas explicitement demandé.
- Les résultats numériques seront donnés avec une précision de  $10^{-2}$ .
- Dans tout le sujet, *Exprimer* signifie conventionnellement *Donner l'expression littérale* et *Calculer* signifie conventionnellement *Donner la valeur numérique*.
- En page 6, après la fin du sujet, on trouvera un formulaire rappelant quelques formules utiles.

## 1 Electrostatique : modèle du champ électrique atmosphérique

L'ionosphère est une couche supérieure de l'atmosphère, située à une altitude de l'ordre de  $H = 50\text{km}$ , dont les composants gazeux sont ionisés sous l'effet du rayonnement solaire et qui peut donc être considérée comme conductrice. Entre le sol et l'ionosphère, l'atmosphère est par contre isolante. On assimile donc l'ensemble Terre - ionosphère à un condensateur sphérique. On suppose que la Terre, de rayon moyen  $R_T = 6371\text{km}$ , porte une densité surfacique de charge négative et uniforme ( $\sigma < 0$ ). On note  $r$  la distance entre le centre de la Terre  $O$  et un point quelconque. On oriente l'espace avec un axe radial  $\vec{u}_r$  pointant vers l'extérieur de la Terre. On donne  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{S.I.}$

**1** - Par des arguments de symétrie, indiquer la direction du champ électrique  $\vec{E}$  créé par ce système et le signe des charges ionosphériques. Tracer quelques lignes de champ et surfaces équipotentielles, en mettant en évidence la relation entre les deux. La différence de potentiel  $\Delta V = V_I - V_T$  entre l'ionosphère et la Terre sera-t-elle positive ou négative ?

**2** - En appliquant le théorème de Gauss, exprimer le champ électrique  $\vec{E}$  pour un point de l'atmosphère, c'est-à-dire tel que  $R_T < r < R_T + H$  au-dessus du sol.

**3** - Exprimer la différence de potentiel  $\Delta V = V_I - V_T$  entre l'ionosphère et la Terre.

**4** - La différence de potentiel entre la Terre et l'ionosphère vaut  $\Delta V = 3 \times 10^5 \text{V}$ . En déduire la densité surfacique de charge à la surface de la Terre, ainsi que la charge totale portée par la Terre.

**5** - Exprimer et calculer la capacité  $C$  du condensateur ainsi formé. Exprimer et calculer l'énergie potentielle électrostatique du condensateur.

## 2 Induction : modèle simple de freinage magnétique

On modélise un système de freinage magnétique (tels que ceux utilisés dans les tramways, les poids lourds et les formules 1) par ce système suivant : sur deux rails conducteurs fixes, constitués de deux tiges verticales et parallèles distantes de  $l$ , glisse sans frottements une tige horizontale  $MM'$ , de masse  $m$ , grâce à deux contacts glissants  $M$  et  $M'$ . On négligera les résistances de la tige  $MM'$  et des rails, ainsi que le champ propre produit par les courants induits. Un système non étudié ici produit un champ magnétique uniforme et permanent  $\vec{B}$ , normal au plan du circuit et dirigé selon  $\vec{u}_x$ . Les extrémités supérieures des rails sont reliées à une résistance  $R$ . La tige  $MM'$  est abandonnée sans vitesse à l'instant  $t = 0$ . On désignera par  $i(t)$  l'intensité dans le circuit et par  $v(t)$  la norme de la vitesse de la tige.

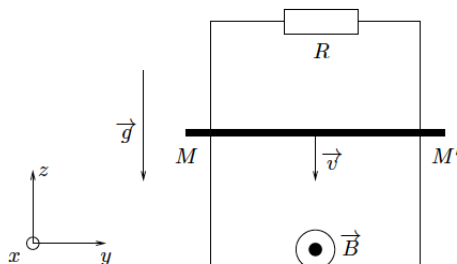


Figure 1 - Système modèle étudié

- 6 - Étudier qualitativement l'évolution du système.
- 7 - Déterminer la force électromotrice  $e$  induite dans la tige  $MM'$  - en précisant son sens sur un schéma - en fonction de  $B$ ,  $l$  et  $v(t)$ . En déduire l'équation électrique du montage.
- 8 - Établir l'équation mécanique du système. En déduire l'équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par  $i(t)$ .
- 9 - Donner la loi d'évolution  $i(t)$ .
- 10 - Donner la loi d'évolution  $v(t)$ .
- 11 - Faire un bilan énergétique de l'évolution : déterminer la puissance de la force de Laplace et l'exprimer en fonction de  $i(t)$ . Conclure sur la conversion électromagnétique.

### 3 Electrocinétique : comportement de la membrane d'un axone

La membrane neuronale est constituée d'une bicouche lipidique à travers laquelle des ions peuvent circuler par l'intermédiaire de canaux dits canaux ioniques. Cette circulation d'ions correspond à un courant électrique qui permet la transmission de l'influx nerveux, qui est bien décrite dans le cadre du modèle introduit par Hodgkin et Huxley en 1952 (prix Nobel en 1963).

#### 3.1 Analyse d'une expérience de Patch-Clamp

Dans une première expérience, on impose un courant transmembranaire en forme d'échelon et on mesure la tension transmembranaire induite par cet échelon.

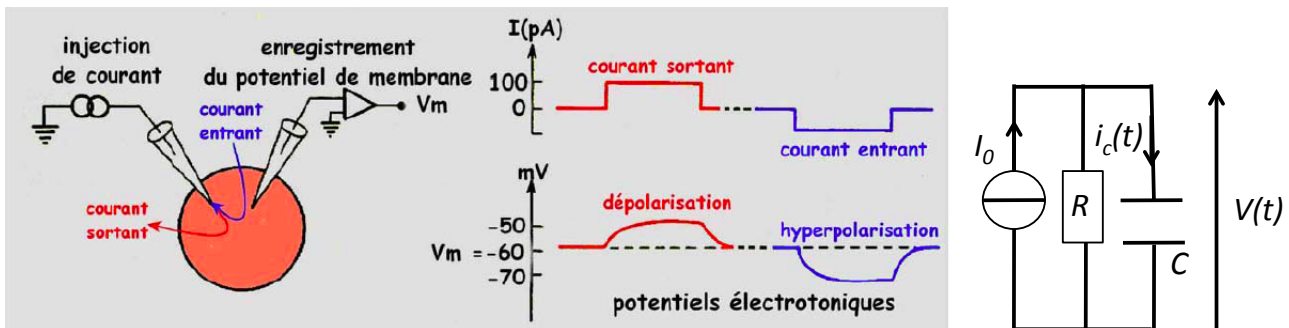


Figure 2 - A gauche : schéma de principe de l'expérience. Au centre : Courbe de tension en fonction du temps. A droite : circuit modèle.

Pour rendre compte des résultats expérimentaux de l'expérience de Patch-Clamp, on modélise la membrane pendant la dépolarisation par un circuit électrique constitué d'une source idéale de courant, de courant électromoteur  $I_0$  constant, en parallèle avec une résistance  $R$  qui est caractéristique de la membrane, elle-même en parallèle avec une capacité  $C$  qui est caractéristique de la membrane. Pour fixer l'échelle temporelle, la durée totale sur laquelle on impose un courant sortant  $I_0$  dans l'expérience de dépolarisation est de l'ordre de  $5ms$ .

- 12 - Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $V(t)$  aux bornes du condensateur  $C$ .
- 13 - On suppose que  $V(t = 0) = V_m$  au début de l'expérience. Etablir l'expression de  $V(t)$ . On fera apparaître un temps typique  $\tau$  en fonction de  $R$  et  $C$ . Tracer l'allure de  $V(t)$  en figurant les valeurs initiale et finale.
- 14 - Expérimentalement, on obtient les courbes figurées ci-avant. Déterminer la valeur numérique de  $\tau$  à partir des courbes. A l'aide de la valeur finale (comprise comme la valeur en fin de dépolarisation) de  $V(t)$ , déterminer la valeur numérique de  $R$  puis celle de  $C$ .

#### 3.2 Modélisation type Hodgkin et Huxley

On cherche à discuter le modèle phénoménologique précédent à l'aide de considérations de biophysique. La première idée est que l'existence de distribution de charges de part et d'autre d'une membrane neuronale correspond à un comportement capacitif. De plus, chaque canal ionique élémentaire  $i$  ( $i = Na, K$ ) est caractérisé par sa résistance  $R_i$ , et, comme il existe des processus de transport actif (pompes,...), un canal est aussi caractérisé par une source idéale : soit une source idéale de tension caractérisée par la force électromotrice  $E_K$ , soit une source idéale de courant caractérisée par le courant électromoteur  $\eta_{Na}$ . Le circuit équivalent à l'ensemble de ces comportements est figuré ci-après.

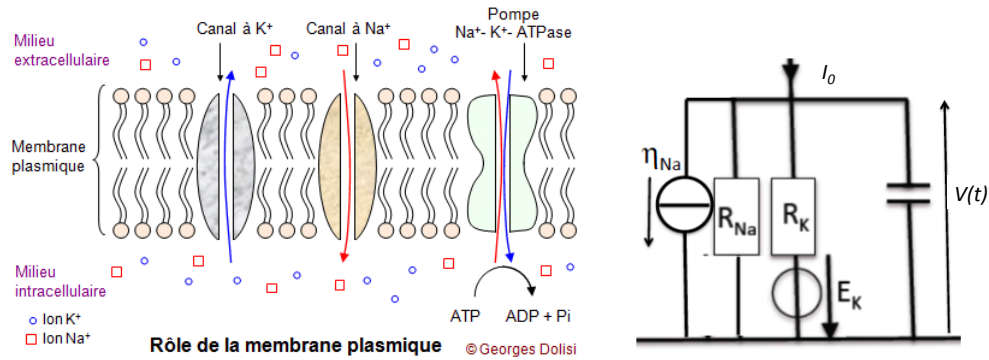


Figure 3 - A gauche : schéma de principe de la membrane d'un axone. A droite : Schéma électrique équivalent du tronçon étudié.

**15** - Simplifier ce circuit modèle en régime permanent. Montrer que l'association des deux canaux ioniques ( $Na$  et  $K$ ) est équivalente à un seul canal, dont :

- on donnera la résistance équivalente  $R_0$  en fonction des résistances des deux canaux,  $R_{Na}$  et  $R_K$
- on donnera la force électromotrice  $E_0$  (orientée vers le bas) en fonction de  $\eta_{Na}$ ,  $E_K$ ,  $R_{Na}$  et  $R_K$ .

**16** - En déduire le courant total  $I_0$  qui traverse la membrane en régime quelconque en fonction de la différence de potentiel transmembranaire,  $V(t)$ . Retrouve-t-on le lien différentiel qui unissait  $I_0$  et  $V(t)$  précédemment ? En quoi l'évolution de  $V(t)$  est-elle *a priori* modifiée pour une expérience de Patch-Clamp ?

## 4 Mécanique

### 4.1 Philae et 67P/Tchouriomov-Guéarrassimenko

L'arrivée de la sonde Philae sur la comète 67P/Tchouriomov-Guéarrassimenko constitue un authentique exploit technique. On s'intéresse à la descente de la sonde Philae de masse  $m$  vers la comète à partir de la sonde Rosetta. On admet que la force gravitationnelle exercée par la comète de masse  $M_C$  sur la sonde de masse  $m$  peut être assimilée à une force newtonienne de la forme :  $\vec{F}_{C \rightarrow m} = -G \frac{M_C m}{r^2} \vec{u}_r$  où  $G \sim 6,7 \cdot 10^{-11} S.I.$  est la constante de gravitation universelle,  $r$  la distance entre le centre  $C$  de la comète et  $m$  et  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire dans la direction  $\vec{Cm}$  tel que  $\vec{Cm} = r\vec{u}_r$ . Enfin, on note  $R_C$  le rayon moyen de la comète, que l'on assimile grossièrement à une boule.

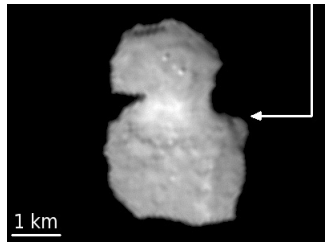


Figure 4 - La comète 67P/Tchouriomov-Guéarrassimenko photographiée par la sonde Philae

Le langage de Philae a eu lieu à une distance initiale de  $D_i = 20km$  depuis le centre de la comète, à une vitesse négligeable. On admet que la trajectoire de Philae est strictement radiale par rapport à la comète. Par ailleurs, on admet que la comète est immobile dans un référentiel galiléen d'origine  $C$ .

**17** - Rappeler la relation générale entre une force conservative  $\vec{F}$  et l'énergie potentielle  $E_P$  dont dérive cette force. Vérifier que l'énergie potentielle  $E_{P_{Cm}}(r)$  dont dérive la force  $\vec{F}_{C \rightarrow m}$ , si l'on prend comme origine la situation où  $m$  est située à une distance infinie, est  $E_{P_{Cm}}(r) = -G \frac{M_C m}{r}$ . Tracer  $E_{P_{Cm}}(r)$  et, en utilisant la relation entre direction d'une force et sens de variation de l'énergie potentielle associée, vérifier que  $\vec{F}_{C \rightarrow m}$  est bien une force attractive.

**18** - Rappeler le théorème de l'énergie mécanique. Expliquer physiquement pourquoi l'on peut considérer que l'énergie mécanique de Philae est constante au cours de son mouvement. En déduire la norme de la vitesse de Philae  $v_C$  au moment du contact avec le sol de la comète en fonction de  $M_C$ ,  $R_C$ ,  $G$  et  $D_i$  uniquement.

**19** - Proposer une estimation de  $R_C$  à l'aide de la photographie ci-avant (un chiffre significatif suffit). On trouve dans une plaquette d'information à destination du grand public que  $v_C \sim 1m.s^{-1}$ . En déduire une estimation de  $M_C$ .

**20** - Toujours en assimilant la comète à une boule de rayon  $R_C$ , évaluer sa masse volumique. La comparer à des masses volumiques pertinentes et commenter.

## 4.2 Fonctionnement d'un TMD

La minimisation des oscillations provoquées par le vent dans les gratte-ciels a récemment débouché sur la mise au point de systèmes asservis appelés « Tuned Mass Damper » (TMD). Schématiquement, un TMD est un oscillateur placé en sommet de structure, et dont les oscillations sont couplées à celles de la structure de telle sorte à minimiser ces dernières.

### 4.2.1 Modélisation de l'élasticité transverse d'une tour

On considère une tour comme une tige rigide sans masse de longueur  $\ell$  constante :

- fixée au sol par son extrémité basse grâce à une liaison pivot parfaite  $O$ , telle que la tige peut tourner sans frottement autour de  $O$  (on note  $\theta(t)$  la position angulaire de la tige par rapport à la verticale et on associe à cette position angulaire une base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ),
- à laquelle est fixée, en son extrémité haute, une masse  $m$ . On note  $M$  la position de cette masse.

**21** - Si l'on note  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires, rappeler les expressions générales des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires. Adapter ces expressions générales et exprimer dans la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  la vitesse et l'accélération de  $m$  en fonction de  $\ell$  et des dérivées temporelles de  $\theta(t)$  uniquement.

L'élasticité transverse de la tour tend à la ramener dans une position verticale si elle s'en écarte. Pour traduire cet effet, on admet que tout se passe comme si :

- la masse  $m$  était fixée à un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide nulle
- ce ressort était fixé à son autre extrémité en un point  $H$
- le point  $H$  était astreint à se déplacer sans frottement sur la verticale en pointillés de sorte que le ressort reste toujours horizontal (comme sur le schéma ci-après)

On note  $g$  l'intensité du champ de pesanteur, supposé vertical uniforme et descendant.

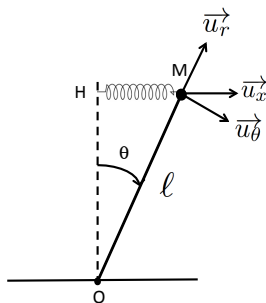


Figure 5 - Système modèle étudié

**22** - Exprimer la longueur  $HM$  du ressort en fonction de  $\ell$  et  $\theta$ . En déduire l'expression de la force de rappel exercée par le ressort sur la masse  $m$ . Projeter cette force dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

On admet que l'action de la tige  $\vec{F}_t$  sur la masse  $m$  est telle que  $\vec{F}_t = F_t \vec{u}_r$ . A part cette force, le poids et l'action du ressort, on considère qu'il n'y a pas d'autre force sur  $m$ .

**23** - Sur un schéma, figurer les forces qui s'appliquent sur  $m$ . Projeter le principe fondamental de la dynamique appliqué à  $m$  selon  $\vec{u}_\theta$  et déduire de tout ce qui précède l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$ .

Comme on ne considère que des oscillations transverses de faible amplitude (une dizaine de centimètres pour une tour d'une centaine de mètres de haut), l'approximation des petits angles est pertinente.

**24** - Simplifier l'équation du mouvement si on considère que  $\theta(t)$  reste petit. On rappelle que  $\sin\theta \sim \theta$  et  $\cos\theta \sim 1$  dans ce cas. Vérifier que si  $k\ell - mg > 0$ , on se ramène à l'équation d'un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre,  $\omega_0$ .

**25** - En supposant que la condition précédente est vérifiée, on considère une situation correspondant à une secousse brusque où  $\theta(t=0) = 0$  et  $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$ . Déterminer  $\theta(t)$  et en déduire la position angulaire maximale  $\theta_{max}$  atteinte par la tour, en fonction uniquement de  $\dot{\theta}_0$  et  $\omega_0$ .

### 4.2.2 Etude du système {tour ; TMD}

On adjoint à la tour étudiée précédemment un TMD. On admet que l'action du TMD sur la tour est assimilable à une force de frottement fluide supplémentaire de la forme  $\vec{F}_F = -\lambda \vec{v}$  (où  $\vec{v}$  est la vitesse de  $m$ ) qui s'applique sur  $m$ .



Détail du TMD de la Tour Taipei 101, à Taïwan (le plus haut gratte-ciel du Monde).

Figure 5 - Détail du TMD de la Tour Taipei 101

**26** - Etablir la nouvelle équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$ .

**27** - Simplifier cette nouvelle équation dans l'approximation des petits angles. Toujours en supposant que la condition  $k\ell - mg > 0$  est vraie, vérifier qu'elle peut se mettre sous la forme canonique :  $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$  où l'on précisera l'expression de  $Q$ . Quelle est la signification physique de cette grandeur ? Commenter ses dépendances en  $\lambda$  et en masse  $m$ . Avec les mêmes conditions que précédemment, que peut-on dire qualitativement de la valeur de l'angle maximal atteint dans ce cas,  $\theta'_{max}$  ? Quel est l'intérêt du TMD ?

### 4.3 Confinement magnétique dans un tokamak

La réaction de fusion qui semble actuellement la plus réalisable correspond à la fusion de deux isotopes de l'hydrogène, le deutérium (D) et le tritium (T). Une telle réaction nécessite une température élevée : les atomes, initialement à l'état gazeux, sont alors entièrement ionisés, et pour décrire l'état de la matière on parle d'état plasma. Cet état est atteint en confinant la matière grâce à un champ magnétique. On négligera la gravité dans toute cette partie.

#### 4.3.1 Généralités sur le mouvement dans un champ uniforme

**28** - Soit une particule chargée de charge  $q$  et de masse  $m$  dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0$ , telle que sa vitesse initiale soit  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0\parallel} + \vec{v}_{0\perp}$  où  $\vec{v}_{0\parallel}$  désigne la composante de la vitesse initiale le long de  $\vec{B}_0$  et  $\vec{v}_{0\perp}$  la composante de la vitesse initiale perpendiculairement à  $\vec{B}_0$ . Que peut-on dire du mouvement longitudinal, c'est-à-dire parallèlement à  $\vec{B}_0$  ? Justifier.

On s'intéresse uniquement au mouvement transverse, perpendiculairement à  $\vec{B}_0$ . Tout se passe donc comme si la particule avait une vitesse initiale  $\vec{v}_{0\perp}$ .

**29** - Montrer que la norme de la vitesse est une constante. En supposant que le mouvement est circulaire de centre  $O$ , montrer à l'aide des coordonnées polaires que le rayon de giration  $R$  est une fonction simple de  $v_{0\perp}$ ,  $m$ ,  $q$  et  $B_0$ .

**30** - On revient maintenant au cas général avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0\parallel} + \vec{v}_{0\perp}$ . Figurer l'allure de la trajectoire en précisant notamment le sens d'enroulement pour  $q > 0$ . Une telle situation est-elle satisfaisante si l'on souhaite confiner les charges ?

#### 4.3.2 Analyse du mouvement dans un tokamak

Pour palier au problème de l'absence de confinement longitudinal, on adopte une géométrie toroïdale : le plasma est enfermé dans une « boîte » spéciale, appelée tokamak, qui crée un champ magnétique toroïdal.

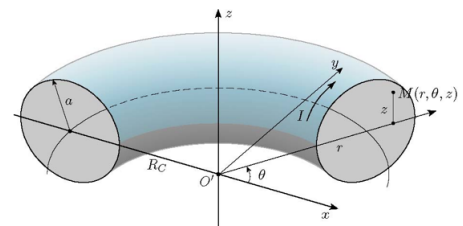
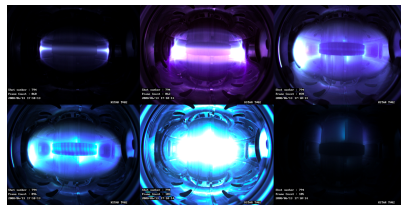
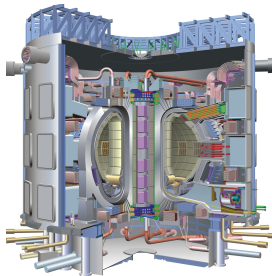


Figure 6 - A gauche : Schéma de principe d'un Tokamak. Au centre : Photographies du plasma dans un tokamak dans divers modes de fonctionnement. A droite : Configuration modèle adoptée pour l'étude du mouvement dans le champ toroïdal.

Dans un tokamak, on enroule  $N$  spires identiques parcourues par une intensité notée  $I$  autour d'un tore. On peut montrer que le champ magnétique créé par cette distribution est de la forme  $\vec{B}_T = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$  si l'on repère un point quelconque à l'intérieur du tore en coordonnées cylindriques, comme c'est le cas sur le schéma de droite.

**31** - En adaptant les résultats précédents, quel mouvement peut-on qualitativement prévoir pour des particules chargées dans le champ magnétique  $\vec{B}_T$ ? Tracer l'allure de la trajectoire. Montrer qualitativement que la non-uniformité du champ pose *a priori* un problème de dérive verticale.

– Fin –

Formulaire :

- Force de Lorentz subie par une particule de charge  $q$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  :  

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$
- Gradient d'une fonction scalaire  $f$  en coordonnées sphériques :  $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \end{pmatrix}$
- Equation caractéristique d'un condensateur en convention récepteur :  $i_c = C \frac{dU_c}{dt}$ , où  $i_c$  est l'intensité qui traverse le condensateur et  $U_c$  la tension à ses bornes.
- Dérivées temporelles des vecteurs de bases polaires :  $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et  $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$