Exercice 1

Dans cet exercice E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4. On définit sur cet espace la famille de polynômes suivante :

$P_0 = 1$; $P_1 = X$; $P_2 = \dfrac{X(X-1)}{2}$; $P_3 = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{3!}$; $P_4 = \dfrac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{4!}$.

1) Pour tout entier n, $1 \le n \le 4$, déterminer les valeurs de $P_n(k)$ pour tout entier k compris entre 0 et n.

2) Montrer que la famille $(P_n)_{0 \le n \le 4}$ est une base de E.

3) On définit sur E l'application f de la manière suivante : pour $P \in E$, $f(P) = P(X+1) - P(X)$.

3.a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

3.b) Déterminer $f(P_n)$ pour tout entier n compris entre 0 et 4.

3.c) En déduire que, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ il existe un polynôme $P \in E$ tel que $Q = f(P)$. Ce polynôme est-il unique ?

4.a) Déterminer un polynôme P tel que : $\begin{cases} f(P) = P_1 \\ P(0) = 0 \end{cases}$.

4.b) En déduire une méthode pour calculer $\sum_{k=1}^{n} k$ où n est un entier, $n \ge 2$. Donner la valeur de cette somme.

5.a) Déterminer un polynôme R tel que : $\begin{cases} f(R) = X^2 \\ R(0) = 0 \end{cases}$.

5.b) En déduire une méthode pour calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$ où n est un entier, $n \ge 2$. Donner la valeur de cette somme.

Exercice 2

Pour tout couple (p,q) d'entiers positifs, on pose : $I\left(p,q\right)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$. En particulier, $I(p,0)=\int_0^1 x^p dx$ et $I\left(0,q\right)=\int_0^1 (1-x)^q\,dx$.

1) Donner les valeurs de $I\left(p,0\right)$ et $I\left(0,q\right)$. Pour cette dernière intégrale on pourra effectuer le changement de variable $t=1-x$.

2) Montrer que, pour tout couple $\left(p,q\right)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on a l'égalité : $I\left(p,q\right)=\dfrac{q}{p+1}I\left(p+1,q-1\right)$.

3) Pour tout entier positif ou nul *q*, on considère la propriété H_q :

« $\forall p\in\mathbb{N}$, $I\left(p,q\right)=\dfrac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)$ ».

Montrer, par récurrence sur *q*, que H_q est vraie pour tout entier positif ou nul *q*. (On rappelle que, par convention, $0!=1$). En particulier donner $I\left(n,n\right)$.

4) On se propose de calculer l'intégrale $I=\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$.

4.a) Effectuer dans cette intégrale le changement de variable $x=t^2$ avec $t\geq 0$.

4.b) Dans l'intégrale obtenue, effectuer le changement de variable $t=\sin u$.

4.c) Déterminer la valeur de *I*.

Exercice 3

Soit $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x,y,z)=(x-y+z,-x+y+z,2z)$, et $Id:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application identité.

1.a) Vérifier que f est linéaire.

Désormais on identifiera un vecteur $v=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ et sa matrice $V=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans (e_1,e_2,e_3) base standard de $\mathbb{R}^3$.

1.b) Déterminer la matrice M associée à f dans la base (e_1,e_2,e_3).

1.c) Déterminer $\ker f=\left\{ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, f(X)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et en donner une base. On notera u_1 un vecteur de cette base.

2.a) Déterminer la dimension de $\operatorname{Im} f$.

2.b) Montrer que les vecteurs $u_2 = f(e_2)=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = f(e_3)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment une base de $\operatorname{Im} f$.

3.a) Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

3.b) Ecrire la matrice de f dans cette base.

3.c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $f^n = fof..of$ (*n* fois *f*) le composé de *n* endomorphismes égaux à *f*.

Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f^n = 2^{n-1} f$.

Exercice 4

On rappelle que, si a et b sont des nombres réels ou complexes distincts, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y''-(a+b)y'+ab\,y=0$ sont les fonctions y définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x)=\lambda e^{ax}+\mu e^{bx}$ où λ et μ sont des constantes réelles si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, complexes si $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

1.a) Résoudre l'équation différentielle $y''-y=0$.

1.b) Trouver une solution particulière de l'équation $y''-y=x$ sous la forme d'une fonction polynôme de degré1.En déduire la solution générale de l'équation $y''-y=x$.

2.a) Résoudre l'équation différentielle $y''+y=0$. On donnera les solutions à valeurs réelles.

2.b) Trouver une solution particulière de l'équation $y''+y=\cos x$ de la forme : $\forall x\in\mathbb{R}$, $y(x)=P(x)\sin x$ où P est un polynôme de degré 1.

3) Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

3.a) Montrer qu'il existe un unique couple (u,v) de fonctions, u paire, v impaire, telles que : $f=u+v$. Pour tout x réel, on donnera l'expression de $u(x)$ et celle de $v(x)$ à l'aide de $f(x)$ et $f(-x)$.

3.b) Vérifier que u et v sont de classe C^2, que u' et v'' sont impaires, et que u'' et v' sont paires.

4) On se propose de trouver toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)+f(-x)=x+\cos x \quad (E)$. (Attention, ce n'est pas une équation différentielle)

4.a) Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On pose $f=u+v$ où u et v sont les fonctions dont l'existence a été prouvée en 3.a) .

Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si u est solution de l'équation différentielle $u''(x)+u(x)=\cos x$ et v solution de l'équation différentielle $v''(x)-v(x)=x$ sur $\mathbb{R}$.

4.b) En déduire les solutions de (E).