EIVP 2023

La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation. Il convient d'encadrer ou de souligner les résultats.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. En revanche les différentes questions d'un même exercice doivent être traitées dans l'ordre. Si on ne sait pas résoudre une question, on peut passer à la suivante en admettant son résultat.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

Soit f la fonction définie sur E par $f(P) = (X^2 - X)P'' - 6P$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) Déterminer $f(1), f(X), f(X^2)$ et $f(X^3)$. En déduire la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de E.

3) Déterminer les polynômes P tels que $f(P) = 0$, c'est-à-dire le noyau de f.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les intégrales $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx.$

1) Vérifier que, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan x$ est $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2$.

2) Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n \leq 1$ et que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Que peut-on en déduire pour cette suite ?

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_n + I_{n+2}$. *Indication : on pourra effectuer le changement de variable* $u = \tan x$.

4) Calculer I_0, I_1 puis I_2 et I_3.

5) En remarquant que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < I_n + I_{n+2}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

6) Montrer, par exemple par récurrence, que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n I_{2n} = I_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

7) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

On note $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On note A la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $M_2(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $AM = MA$ si et seulement si $x=t$ et $y=z$.

2) On se propose de trouver les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2+M=A$ (*).

2.a) Montrer que, si M vérifie l'égalité (*), $AM=MA$.

2.b) En déduire les matrices M de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2+M=A$.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2, vérifiant :

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \quad (E)$

1) On suppose qu'une telle fonction existe. Montrer que $f(0)=1$ ou $f(0)=0$.

Montrer que, si $f(0)=0$, la fonction f est la fonction nulle, c'est-à-dire $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0$.

Montrer que, si $f(0)=1$, la fonction f est paire.

2) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On pose :

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi(x,y)= f(x+y)+f(x-y)-2f(x)f(y)$.

2.a) Calculer $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y}$.

2.b) En déduire que, si f vérifie l'égalité (E), $f'(0)=0$.

2.c) Montrer que, si f vérifie l'égalité (E), et si $f(0)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=f''(0)f(x)$.

3) Dans cette question, on suppose que f est une fonction de classe C^2 vérifiant l'égalité (E), et que $f(0)=1$.

3.a) On suppose que $f''(0)=0$. Déterminer la fonction f.

3.b) On suppose que $f''(0)>0$. On pose $f''(0)=a^2$ où a est un réel strictement positif. Déterminer les fonctions f possibles. (*On rappelle que les solutions de l'équation différentielle* $y''-a^2y=0$ *sont de la forme* $y(x)=Ae^{ax}+Be^{-ax}$ *où* A *et* B *sont des réels quelconques.)*

3.c) On suppose que $f''(0)<0$. On pose $f''(0)=-a^2$ où a est un réel strictement positif. Déterminer les fonctions f possibles. (*On rappelle que les solutions de l'équation différentielle* $y''+a^2y=0$ *sont de la forme* $y(x)=A\cos(ax)+B\sin(ax)$ *où* A *et* B *sont des réels quelconques.)*

4) Déterminer toutes les fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité (E).