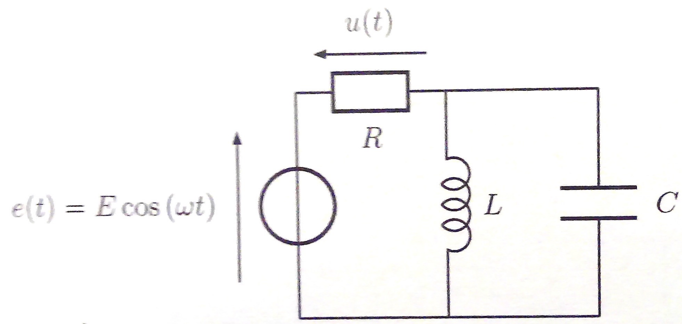
EIVP - CONCOURS INTERNE - PHYSIQUE – 2023

Durée : 4 heures – Sans document ni téléphone portable - Calculatrice autorisée

- Le barème tient compte des qualités de rédaction et de présentation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et indique les initiatives qu'il est amené à prendre.
- Tout commentaire est le bienvenu, même lorsqu'il n'est pas explicitement demandé.
- Les résultats numériques seront donnés avec une précision de 10^{-2}.
- Dans tout le sujet, *Exprimer* signifie conventionnellement *Donner l'expression littérale* et *Calculer* signifie conventionnellement *Donner la valeur numérique.*

1 Antirésonance

On considère le circuit suivant, en régime sinusoïdal forcé.



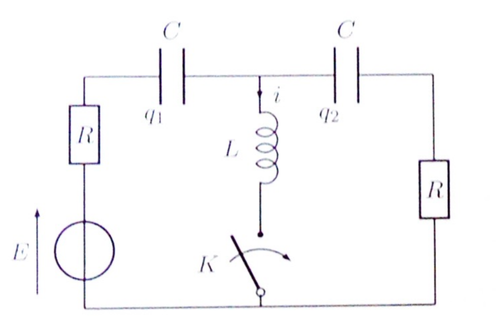
1 - Exprimer l'impédance $\underline{Z}_{LC}$ de l'association en dérivation de L et de C. En déduire l'impédance $\underline{Z}_{tot}$ de l'association de R en série avec $\underline{Z}_{LC}$. En déduire la grandeur complexe $\underline{i}(t)$ associée au courant $i(t)$ qui traverse l'ensemble du circuit (donc la résistance R) en régime sinusoïdal forcé.

2 - Exprimer l'amplitude U de la tension $u(t)$ en régime sinusoïdal forcé, en fonction de E, $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

3 - Tracer l'allure de $U(x)$ et interpréter physiquement.

2 Modèle électrique d'oscillateurs couplés

On considère le circuit ci-après dans lequel les résistances et les condensateurs sont identiques. On considère que les condensateurs, initialement déchargés ont été reliés à la source de tension depuis un temps très long, l'interrupteur K étant ouvert. A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K dans la branche contenant la bobine.



On prendra : $E = 1V$, $C = 10^{-6}F$, $R = 2.10^2\Omega$ et $L = 5.10^{-3}H$. On s'intéresse d'abord au comportement du système pour les temps négatifs, c'est-à-dire dans une situation pour laquelle l'intérupteur K est ouvert et pour laquelle le régime permanent est supposé atteint.

4 - Exprimer les charges $q_1(t = 0^-)$ et $q_2(t = 0^-)$ portées par les armatures gauches des deux condensateurs juste avant la fermeture de K. Exprimer l'énergie $\mathscr{E}_0$ stockée dans l'ensemble des condensateurs juste avant la fermeture de K, en fonction de C et de E uniquement. Faire l'application numérique.

5 - Exprimer $q_1(t = 0^+)$, $q_2(t = 0^+)$ et $i(t = 0^+)$. En déduire $\left(\frac{dq_1}{dt}\right)_{t=0^+}$ et $\left(\frac{dq_2}{dt}\right)_{t=0^+}$.

On s'intéresse à présent à l'évolution du système pour des temps positifs.

6 - Prévoir $q_{1\infty}$, $q_{2\infty}$ et i_∞ lorsque le régime permanent sera atteint. Exprimer l'énergie $\mathscr{E}_\infty$ stockée dans l'ensemble des condensateurs en régime permanent, en fonction de C et de E uniquement. Faire l'application numérique et commenter.

7 - Déterminer les équations différentielles linéaires vérifiées par $q_1(t)$ et $q_2(t)$. Il s'agit d'équations différentielles couplées : pour l'équation différentielle [$*$] sur $q_1(t)$, le premier membre faisant uniquement apparaître des termes fonctions de $q_1(t)$, le second membre fait apparaître la fonction $q_2(t)$ ou ses dérivées ; inversement, pour l'équation différentielle [$**$] sur $q_2(t)$, le premier membre faisant uniquement apparaître des termes fonctions de $q_2(t)$, le second membre fait apparaître la fonction $q_1(t)$ ou ses dérivées.

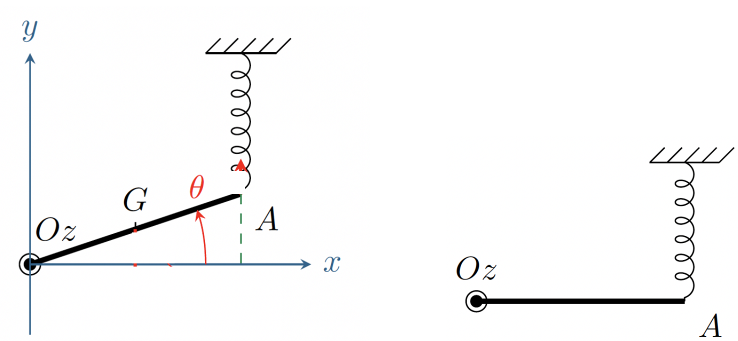
8 - On pose $q_S(t) = q_1(t) + q_2(t)$ et $q_D(t) = q_1(t) - q_2(t)$. En sommant et en soustrayant les équations [$*$] et [$**$] , montrer que $q_S(t)$ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $q_D(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2, ces deux équations étant découplées.

9 - Déterminer $q_S(t)$. Attention : le résultat peut surprendre. Déterminer $q_D(t)$.

10 - En déduire $q_1(t)$ et $q_2(t)$ et tracer les allures correspondantes.

3 Oscillations d'une barre

Considérons le système mécanique représenté ci-après, constitué d'une barre de masse m, de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe O_z. Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.



11 - Dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical (figure de droite). Pourquoi le théorème de la résultante dynamique (ou théorème du centre d'inertie) ne peut-il pas être utile pour caractériser cette position d'équilibre ? Ecrire l'équilibre de la barre à l'aide du théorème du moment cinétique à l'équilibre et en déduire la longueur du ressort à l'équilibre l_e en fonction de k, m, g et de l_0.

La barre est écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale (figure de gauche). On note θ l'angle de la barre avec l'horizontale. On suppose que le ressort reste vertical.

12 - Exprimer l'énergie mécanique de l'ensemble barre-ressort en fonction de θ et $\dot{\theta}$ notamment. Justifier proprement que cette énergie est constante. En déduire l'équation différentielle liant $\ddot{\theta}$ et θ.

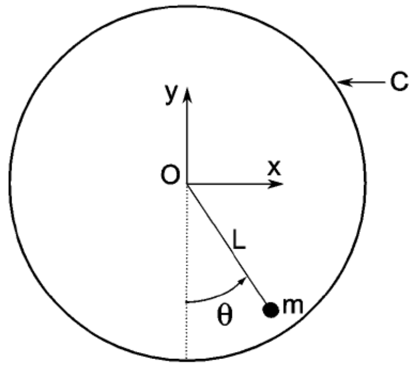
13 - Retrouver l'équation précédente à l'aide du théorème du moment cinétique.

14 - Linéariser cette équation si $\theta \ll \pi$ et en déduire la pulsation des petites oscillations en fonction de k et m uniquement.

4 Comportement d'un système mécanique au voisinage d'un point de bifurcation

Le phénomène de birfucation est un phénomène fondamental de la physique non-linéaire. Il ouvre la porte aux comportements non-intégrables et chaotiques. On étudie ici un système mécanique simple au voisinage d'un point où son comportement peut subir, selon les conditions, une bifurcation.

Soit une bille sphérique de masse m et de rayon R, fixée à l'extrémité d'une tige rigide de masse négligeable et de longueur L, comme indiqué dans le schéma ci-après. L'autre extrémité de la tige est articulée autour d'un point O fixe, centre d'un cylindre C d'axe noté O_Z.



La liaison permet à la tige de tourner autour de ce point en la maintenant dans le plan de la figure. On décrit le mouvement de m en coordonnées polaires dans ce plan. On se placera de plus dans des conditions telles que $R << L$ de sorte à pouvoir considérer la bille comme ponctuelle du point de vue de la mécanique. On notera g l'intensité du champ de pesanteur. On admet que lorsqu'elle se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un fluide visqueux de viscosité dynamique η se déplaçant lui même à une vitesse $\overrightarrow{v_f}$, la bille subit de la part du fluide une force $\overrightarrow{F} = -6\pi R\eta\,(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_f})$.

Le cylindre C est rempli d'un tel fluide et il est mis en rotation par un opérateur à une vitesse angulaire constante Ω, entrainant ainsi le fluide dans son mouvement. On suppose que la vitesse du fluide n'est pas affectée par la présence de la tige ni de la masse, si bien que l'on peut écrire $\overrightarrow{v_f} = L\Omega\overrightarrow{u_\theta}$ au voisinage de la masse m.

15 - Rappeler les expressions génériques de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires. Rappeler l'expression générale de la Poussée d'Archimède. *On négligera cette poussée d'Archimède dans tout le problème.*

16 - Etablir l'équation différentielle qui vérifiée par $\theta(t)$. La mettre sous la forme : $\tau\ddot{\theta}+\dot{\theta}+\alpha sin\theta = \beta$ où l'on exprimera les différentes constantes τ, α et β en fonction de m, L, g, η, R et Ω.

17 - On note respectivement θ_m et τ_m l'amplitude et la durée typiques des oscillations de la masse au cours du mouvement. Par analyse dimensionnelle, exprimer en fonction de θ_m, τ_m et τ, l'ordre de grandeur des termes $\tau\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ (respectivement inertiel et visqueux) qui figurent dans l'équation précédente. En déduire une condition sur τ_m pour pouvoir négliger le terme inertiel dans cette équation différentielle.

On se place dans ce cas-là, appelé régime visqueux, pour toute la suite de l'étude.

18 - Donner l'équation vérifiée par les positions d'équilibre θ_e. En déduire qu'il existe une valeur critique de β, notée β_c à partir de laquelle le nombre de solutions à cette équation change. Expliciter l'expression des valeurs d'équilibre $\theta_{e,i}$ (lorsqu'elles existent) dans les différents cas (on pourra s'appuyer sur une étude graphique). En déduire le graphe représentatif des positions d'équilibre θ_e en fonction du paramètre Ω.

On dit que pour $\beta = \beta_c$ se produit une bifurcation du système : son comportement change alors radicalement.

19 - Lorsque $\beta < \beta_c$, étudier la stabilité des éventuelles positions d'équilibre vis-à-vis de petites perturbations angulaires à l'aide d'une analyse de l'équation du mouvement pour chacune des positions d'équilibre. On fera apparaître le cas échéant une pulsation des petites oscillations ou un temps typique de divergence que l'on exprimera uniquement en fonction de α et de $cos\theta_{e,i}$.

20 - Que se passe-t-il si $\beta > \beta_c$? Quelle est alors la trajectoire de la masse ? En quel point de la trajectoire la vitesse est-elle maximale ? Minimale ? Interpréter physiquement ces deux résultats.

On se place dans le cas où β est très proche de β_c par valeur supérieure.

21 - Représenter l'allure de $\dot{\theta}$ en fonction de θ. Toujours sans expliciter la solution, représenter qualitativement (en la justifiant soigneusement) l'allure de l'abcisse x de la masse en fonction du temps. *On pourra choisir l'origine des temps telle que $\theta(t = 0) = 0$.*

21 - Exprimer la période T du mouvement sous forme d'une intégrale sur θ, fonction de β et β_c. Simplifier cette expression sachant que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{du}{1+a-sinu} \sim \sqrt{\frac{2\pi^2}{a}}$ quand a tend vers 0. Vers quelle limite tend T quand β tend vers β_c ? Commenter.

5 Electrostatique et mouvements d'une charge

Soit un cylindre de révolution de longueur infinie et de rayon R, chargé sur sa surface latérale avec une densité surfacique de charge σ_R. On repère la position d'un point générique M de l'espace en coordonnées cylindriques d'axe l'axe O_Z du cylindre étudié.

22 - Prévoir la direction et les dépendances du champ $\overrightarrow{E}(M)$. A l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ életrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ pour $r > R$ et pour $r < R$.

23 - En déduire le potentiel électrostatique dans les deux zones d'espace, en supposant qu'il vaille V_R au niveau du cylindre chargé.

On considère maintenant deux électrodes cylindriques coaxiales d'axe O_Z et de rayons respectifs R_C pour la cathode et $R_A > R_C$ pour l'anode. La cathode est à potentiel nul et l'anode est à un potentiel V_0 positif et constant. L'espace compris entre l'anode et la cathode est vide ; on repère un point par ses coordonnées cylindriques. On admet que le potentiel créé par cette distribution est de la forme : $V(r) = \alpha lnr + \beta$, où $\alpha > 0$.

On considère une un électron de charge $q = -e$ et de masse m.

24 - Déterminer α et β en fonction de V_0, R_A et R_C.

25 - Rappeler l'expression de $E_P(r)$, l'énergie potentielle d'une charge $q = -e$ en un point de potentiel électrique $V(r)$. Tracer son allure. Rappeler l'expression du gradient en coordonnées cylindriques et en déduire l'expression de la force électrique $\overrightarrow{F}$ associée à l'énergie potentielle E_P. Vérifier physiquement son sens en rapport avec la représentation graphique de $E_p(r)$.

26 - Soit un électron émis sans vitesse initiale depuis la cathode. Exprimer sa vitesse quand il atteint l'anode.