Épreuve de mathématiques

L'épreuve comporte trois exercices. La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation. Il convient d'encadrer ou de souligner les résultats.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

1) a) Soit $t \in]0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} e^{i\frac{n+1}{2}t}$.

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} - \frac{1}{2}$.

2) On considère la fonction $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par :

$g(t) = \frac{t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ si $t \in]0,\pi]$ et $g(0) = 0$.

On prendra garde, dans les questions suivantes, au fait que 0 joue ici un rôle particulier.

a) Montrer que g est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

b) Établir que pour $t \in [0,\pi]$ on a : $\sum_{k=1}^{n} t^2 \cos(kt) = \frac{1}{2} g(t) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] - \frac{1}{2}t^2$

3) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que : $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

b) En utilisant des intégrations par parties, déterminer le réel α tel que :

$\int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\,dt = \alpha \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

4) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] dt$.

5) On pose $U_n = \int_0^{\pi} g(t) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] dt$ et $K = \sup_{t\in[0,\pi]} |g'(t)|$.

a) Justifier l'existence du réel K et montrer que : $|U_n| \leq \frac{K\pi}{n+\frac{1}{2}}$.

b) En déduire la limite L de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6) a) Justifier que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

b) Montrer que : $\sigma_{2n} - S_{2n} = 2\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sigma_n$.

c) En utilisant le résultat de 5), déterminer alors la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 2

Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice sur la base canonique est :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$.

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on pose :

$\vec{u}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$; $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4$; $\vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4$; $\vec{u}_4 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$.

2) a) Justifier que la famille $\gamma = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Montrer que, pour $k \in \{2,3,4\}$: $h(\vec{u}_k) = \lambda_k \vec{u}_k$ où $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont des réels à déterminer.

3) a)Déterminer la matrice, notée Δ, de h relativement à la base γ.

b) Donner, en justifiant, la matrice P telle que $H = P\Delta P^{-1}$.

4) a) Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $H^{2q} = 4^{q-1}H^2$.

b) Donner, pour tout q de $\mathbb{N}^*$, une expression simple de H^{2q+1} en fonction de H.

Exercice 3

1) Soit a, b, c des réels. On considère les matrices

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ -2 & 0 & 2b \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad V(a,b) = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N(c) = \begin{pmatrix} -3 & c & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2c & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3c \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $M(a,b)V(a,b)$ et en déduire le rang de $M(a,b)$.

b) Donner le déterminant de $N(c)$ sous sa forme la plus factorisée et vérifier qu'il est nul si et seulement si $c=1$.

c) Déterminer le rang de $N(c)$ suivant les valeurs de c.

Dans la suite Q est un polynôme de degré 2 à coefficients réels et n un entier supérieur à 2.

On considère l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$; $P \mapsto P'Q - \frac{n}{2}PQ'$.

2) Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Ici $Q = X^2 + aX + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et $n=2$.

a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer le noyau de f. On pourra utiliser un résultat de 1).

c) Donner l'image de f.

4) Ici $Q = X^2 + 2X + c$ où $c \in \mathbb{R}$, et $n=3$.

a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Déterminer le noyau de f suivant les valeurs de c. On pourra utiliser un résultat de 1).

Fin du sujet