

Épreuve de mathématiques

L'épreuve comporte trois problèmes indépendants. La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation. Il convient d'encadrer ou de souligner les résultats.

Problème 1

Soit A la matrice donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

v est l'endomorphisme associé à A dans la base canonique.

Notons $\chi_A(X) = \det(XI_3 - A)$.

1. Déterminer le polynôme χ_A et déduire qu'il possède une seule racine λ à préciser.
2. Déterminer $\ker(v - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
► Notons $u = v - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ et $e_1 = (1, 0, 0)$.
3. Montrer que $u^3 = u \circ u \circ u = 0$
4. Déterminer le noyau de l'endomorphisme u^2 puis vérifier que $e_1 \notin \ker(u^2)$
5. i) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{u^2(e_1), u(e_1), e_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
ii) Écrire la matrice T de v dans la base $\mathcal{B}$.
iii) Exprimer A en fonction de T .

Problème 2

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n désigne la fonction polynômiale définie par :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soit n un entier naturel non nul.

1. i) Quel est le degré de P_n ?
ii) Que peut-on dire de la dérivée k -ième de $P_n^{(k)}$ de P_n pour tout entier $k \geq 2n + 1$?
2. i) Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.
ii) Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$.

3. Soit k un entier naturel vérifiant : $n \leq k \leq 2n$.

i) Montrer que, pour tout réel x on a :

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^n \binom{k}{p} \frac{n!}{(n-p)!} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} x^{n-p} (a-bx)^{n-k+p}.$$

ii) En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a , b , n , et k .

iii) Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.

Problème 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t + \arctan t = 0$.

2. On pose : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \arctan t}$

i) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

ii) Étudier la parité de f .

iii) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $f'(x)$, pour $x > 0$.

iv) Donner le sens de variation de f .

3. On étudie le comportement de f au voisinage de $+\infty$:

i) Déterminer une constante C telle que pour tout $x > 0$:

$$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq C \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$$

ii) En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ et préciser sa valeur.

4. On étudie le comportement de f au voisinage de 0^+ :

i) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\frac{1}{t + \arctan t} = \frac{a}{t} + bt + o(t)$

au voisinage de 0^+ .

ii) Soit g une fonction de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{t \in [x, 2x]} |g(t)| = 0$

iii) En déduire que si h est une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$h(x) = o(x)$ au voisinage de 0^+ alors $\int_x^{2x} h(t) dt = o(x^2)$ au voisinage de 0^+

iv) Montrer que f admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre 2 que l'on exprimera.

v) Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable. Exprimer alors les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

vi) Étudier, au voisinage de 0, la position relative de f et de sa tangente en 0.

vii) Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ en 0.

viii) En déduire que f est deux fois dérivable en 0, et calculer $f''(0)$.

Fin du sujet